



Università
Bocconi
MILANO



POLITECNICO
MILANO 1863



UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI MILANO



Smart Statistics for Smart Applications

Book of Short Papers SIS2019



Editors: Giuseppe Arbia, Stefano Peluso,
Alessia Pini and Giulia Rivellini

Copyright © 2019

PUBLISHED BY PEARSON

WWW.PEARSON.COM

Giugno 2019 ISBN 9788891915108

Preface

Section 1. Plenary Sessions and Round Table

Preface	3
Shallow Learning for Data Science	7
<i>Antonio Canale</i>	
Smart Statistics: concept, technology and service	17
<i>David John Hand, Maurizio Vichi</i>	
Tavola rotonda “Smart ageing: lunga vita attiva, salute e nuove tecnologie”	19

Section 2. Invited Papers

Demography in the Digital Era: New Data Sources for Population Research	23
Demografia nell’era digitale: nuovi fonti di dati per gli studi di popolazione	23
<i>Diego Alburez-Gutierrez, Samin Aref, Sofia Gil-Clavel, André Grow, Daniela V. Negraia, Emilio Zagheni</i>	
Stationarity of a general class of observation driven models for discrete valued processes	31
Stazionarietà di una classe generale di modelli observation-driven per processi a valori discreti	
<i>Mirko Armillotta, Alessandra Luati and Monia Lupporelli</i>	
An extension of the censored gaussian lasso estimator	39
Un'estensione dello stimatore cglasso	
<i>Luigi Augugliaro and Gianluca Sottile and Veronica Vinciotti</i>	
A formal approach to data swapping and disclosure limitation techniques	47
Un approccio formale per tecniche di trasformazione dei dati in problemi di privacy	
<i>F. Ayed, M. Battiston and F. Camerlenghi</i>	
A new ordinary kriging predictor for histogram data in L2-Wasserstein space	55
Un nuovo predittore kriging per istogrammi nello spazio L2-Wasserstein	
<i>Antonio Balzanella and Antonio Irpino and Rosanna Verde</i>	
Keywords dynamics in online social networks: a case-study from Twitter	63
La dinamica delle parole chiave nelle reti sociali online: un esempio tratto da Twitter	
<i>Carolina Becatti, Irene Crimaldi and Fabio Saracco</i>	
Statistical Matching of HBS and ADL to analyse living conditions, poverty and happiness	71
Statistical Matching di HBS e ADL per l'analisi di condizioni di vita, povertà e felicità	
<i>Cristina Bernini, Silvia Emili, Maria Rosaria Ferrante</i>	
Statistical sources for cybersecurity and measurement issues	79
Fonti statistiche per la sicurezza cibernetica e problemi di misurazione	
<i>Claudia Biancotti, Riccardo Cristadoro, Raffaele Tartaglia Polcini</i>	
Use of GPS-enabled devices data to analyse commuting flows between Tuscan municipalities	89
Un'analisi dei flussi di pendolarismo sistematici tra i comuni toscani tramite l'utilizzo di dati GPS	
<i>Chiara Bocci, Leonardo Piccini and Emilia Rocco</i>	
Statistical calibration of the digital twin of a connected health object	97
Inversione statistica dei parametri di ingresso per il gemello digitale di un oggetto sanitario collegato	
<i>Nicolas Bousquet and Walid Dabachine</i>	
Time Series Forecasting: Is there a role for neural networks?	103
Le Reti Neurali nella Previsione di Serie Storiche	
<i>Giuseppe Bruno, Sabina Marchetti, Juri Marcucci, Diana Nicoletti</i>	

Modelling weighted signed networks.....	111
Modellazione di reti segnate pesate	
<i>Alberto Caimo and Isabella Gollini</i>	
Issues on Bayesian nonparametric measures of disclosure risk	119
Questioni su misure Bayesiane nonparametriche di rischio di "disclosure"	
<i>Federico Camerlenghi, Cinzia Carota and Stefano Favaro</i>	
Hierarchies of nonparametric priors.....	125
Gerarchie di distribuzioni iniziali nonparametriche	
<i>Federico Camerlenghi, Stefano Favaro and Lorenzo Masoero</i>	
Issues with Nonparametric Disclosure Risk Assessment.....	133
Questioni sull'Analisi Nonparametrica del Rischio di "Disclosure"	
<i>Federico Camerlenghi, Stefano Favaro, Zacharie Naulet and Francesca Panero</i>	
Technologies and data science for a better health both at individual and population level. ..	141
Two practical research cases.	
Tecnologie e data science per una salute migliore sia a livello individuale che di popolazione.	
<i>Stefano Campostrini and Lucia Zanotto</i>	
Temporal sentiment analysis with distributed lag models	149
Analisi temporale del "sentiment" con modelli a lag distribuiti	
<i>Carrannante M., Mattera R., Misuraca M., Scepti G., Spano M.</i>	
A statistical investigation on the relationships among financial disclosure, sociodemographic variables, financial literacy and retail investors' risk assessment ability	157
Indagine empirica sulle relazioni tra prospetti per la diffusione di informazioni finanziarie, variabili sociodemografiche, educazione finanziaria e abilità di valutazione del rischio	
<i>Rosella Castellano, Marco Mancinelli and Pasquale Samacchiaro</i>	
Bayesian Model Comparison based on Wasserstein Distances.....	167
Confronto di Modelli Bayesiani tramite Distanze di Wasserstein	
<i>Marta Catalano, Antonio Lijoi and Igor Prünster</i>	
Hierarchical Clustering and Dimensionality Reduction for Big Data	173
Clustering e Riduzione Dimensionale Gerarchici per Dati di Grandi Dimensioni	
<i>Carlo Cavicchia, Maurizio Vichi and Giorgia Zaccaria</i>	
ICOs success drivers: a textual and statistical analysis.....	181
Fattori di successo nelle ICOs: un'analisi testuale e statistica	
<i>Paola Cerchiello and Anca Mirela Toma</i>	
Small area estimators with linked data.....	189
Stimatori per piccole aree nel caso di dati ottenuti attraverso il record linkage	
<i>Chambers Raymond and Fabrizi Enrico and Salvati Nicola</i>	
Optimal Portfolio Selection via network theory in banking and insurance sector.....	197
<i>Gian Paolo Clemente, Rosanna Grassi and Asmerilda Hitaj</i>	
Matching error(s) and quality of statistical matching in complex surveys.....	205
Errori di matching e qualità del matching statistico in indagini complesse	
<i>Pier Luigi Conti and Daniela Marella</i>	
Hotel search engine architecture based on online reviews' content.....	213
Un motore di ricerca per gli hotel basato sulle recensioni online	
<i>Claudio Conversano, Maurizio Romano and Francesco Mola</i>	
Economic Crisis and Earnings Management: a Statistical Analysis	219
Crisi Economica e Gestione degli Utili: un'Analisi Statistica	
<i>C. Cusatelli, A.M. D'Uggento, M. Giacalone, F. Grimaldi</i>	
A Comparison of Nonparametric Bivariate Survival Functions.....	227
Confronto tra stimatori non-parametrici della funzione di sopravvivenza bivariata	
<i>Hongsheng Dai and Marialuca Restaino</i>	
Predictive Algorithms in Criminal Justice.....	237
Algoritmi predittivi e giustizia penale	
<i>Francesco D'Alessandro</i>	

A proposal for an integrated approach between sentiment analysis and social network analysis.....	247
Una proposta per un approccio integrato tra analisi del sentimento e analisi delle reti sociali	
<i>Domenico De Stefano and Francesco Santelli</i>	
A meta-tissue non-parametric factor analysis model for gene co-expression	255
Meta-analisi fattoriale non parametrica per lo studio di espressioni genetiche in diversi tessuti	
<i>Roberta De Vito and Barbara Engelhardt</i>	
Bayesian estimate of population count with false captures: a latent class approach.....	261
Stima Bayesiana della popolazione con false catture: un approccio basato sulle classi latenti	
<i>Davide Di Cecco, Marco Di Zio and Brunero Liseo</i>	
Spherical regression with local rotations and implementation in R	269
Regressione sferica con rotazioni locali ed implementazione in R	
<i>Marco Di Marzio, Stefania Fensore, Agnese Panzera, Charles C. Taylor</i>	
A clustering method for network data to analyse association football playing styles	277
Un metodo di raggruppamento per dati di rete finalizzato all'analisi degli schemi di gioco nel calcio	
<i>Jacopo Diqigiovanni</i>	
Big data in longitudinal observational studies: how to deal with non-probability samples and technological changes.....	285
I Big data negli studi longitudinali: come trattare campioni non probabilistici e cambi di tecnologia	
<i>Clelia Di Serio, Luca Del Core, Eugenio Montini and Andrea Calabria</i>	
Smart Data For Smart Health.....	293
Smart Data Per Smart Health	
<i>Clelia Di Serio, Ernst C. Wit, Elena Bottinelli and Roberto Buccione</i>	
Detecting and classifying moments in basketball matches using sensor tracked data.....	297
Una procedura per identificare e classificare momenti di gioco in pallacanestro con l'uso di dati sensori.	
<i>Tullio Facchinetti and Rodolfo Metulini and Paola Zuccolotto</i>	
Ordered response models for cyber risk	305
Modelli a risposta ordinale per la valutazione del cyber risk	
<i>Silvia Facchinetti and Claudia Tarantola</i>	
Functional data analysis-based sensitivity analysis of integrated assessment Models for climate change modelling	313
Analisi di sensitività basata sull'analisi di dati funzionali per modelli di valutazione integrata dei cambiamenti climatici	
<i>Matteo Fontana, Massimo Tavoni and Simone Vantini</i>	
Coupled Gaussian Processes for Functional Data Analysis.....	319
Processi gaussiani per l'analisi dei dati funzionali	
<i>L. Fontanella, S. Fontanella, R. Ignaccolo, L. Ippoliti, P. Valentini</i>	
Two-fold data streams dimensionality reduction approach via FDA	323
Un approccio a due fasi per la riduzione di dimensionalità di data streams via FDA	
<i>F. Fortuna, T. Di Battista and S.A. Gattone</i>	
Statistical analysis of Sylt's coastal profiles using a spatiotemporal functional model	331
<i>Rik Gijsman, Philipp Otto, Torsten Schlurmann, Jan Visscher</i>	
Bootstrap prediction intervals for weighted TAR predictors	339
Intervalli di previsione bootstrap per previsori ponderati per modelli TAR	
<i>Francesco Giordano and Marcella Niglio</i>	
A rank graduation index to prioritise cyber risks	347
Un indice di graduazione per assegnare livelli di priorità ai rischi informatici	
<i>Paolo Giudici and Emanuela Raffinetti</i>	
Vector Error Correction models to measure connectedness of bitcoin exchange markets	355
Modelli di Vector Error Correction per misurare la connessione delle piattaforme di scambio di bitcoin	
<i>Paolo Giudici and Paolo Pagnottoni</i>	
Estimation of lineup efficiency effects in Basketball using play-by-play data.....	363
L'uso dei dati del play-by-play per la stima degli effetti di quintetto nella pallacanestro	
<i>Luca Grassetti, Ruggero Bellio, Giovanni Fonseca and Paolo Vidoni</i>	
Trajectory clustering using adaptive squared distances	371
Clustering di traiettorie attraverso distanze adattative quadratiche	
<i>Antonio Irpino</i>	

Bayesian Analysis of Privacy Attacks on GPS Trajectories	379
<i>Analisi Bayesiana degli Attacchi alla Privacy su Traiettorie GPS</i>	
<i>Sirio Legramanti</i>	
Data Analytics in the Insurance Industry: Market trends and lessons from a use case customer predictive modelling	387
<i>Data Analytics nel settore assicurativo: principali trend e considerazioni da un caso d'uso applicato alla predizione del comportamento degli assicurati</i>	
<i>Cristian Losito and Francesco Pantisano</i>	
BasketballAnalyzeR: the R package for basketball analytics	395
<i>BasketballAnalyzeR: il pacchetto R per l'analisi dei dati nella pallacanestro</i>	
<i>Marica Manisera, Marco Sandri and Paola Zuccolotto</i>	
Data Integration by Graphical Models	403
<i>Utilizzo dei modelli grafici per l'integrazione dei dati</i>	
<i>Daniela Marella and Paola Vicard and Vincenzina Vitale</i>	
A two-part finite mixture quantile regression model for semi-continuous longitudinal data	409
<i>Maruotti Antonello, Merlo Luca and Petrella Lea</i>	
Multivariate change-point analysis for climate time series	415
<i>Analisi di change-point multivariati per serie storiche climatiche</i>	
<i>Gianluca Mastrantonio, Giovanna Jona Lasinio, Alessio Pollice, Giulia Capotorti, Lorenzo Teodonio and Carlo Blasi</i>	
A divide-et-impera approach for the spatial prediction of object data over complex regions	423
<i>Un approccio divide-et-impera per la previsione spaziale di dati oggetto su regioni complesse</i>	
<i>Alessandra Menafoglio e Piercesare Secchi</i>	
A strategy for the matching of mobile phone signals with census data.....	427
<i>Una strategia per l'abbinamento di segnali di telefonia mobile con dati censuari</i>	
<i>Rodolfo Metulini and Maurizio Carpita</i>	
Risk-based analyses for non-proportional reinsurance pricing	435
<i>Analisi Risk-based per il pricing nella riassicurazione di trattati non proporzionali</i>	
<i>Fabio Moraldi and Nino Savelli</i>	
A Simplified Efficient and Direct Unequal Probability Resampling	441
<i>Un semplice Ricampionamento, efficiente e diretto per campioni a probabilità variabili</i>	
<i>Federica Nicolussi, Fulvia Mecatti and Pier Luigi Conti</i>	
Labour Law: Machine vs. Employer Powers Diritto del lavoro: Macchina vs. Poteri datoriali	449
<i>Antonella Occhino – Michele Faioli</i>	
Domain knowledge based priors for clustering.....	455
<i>Distribuzioni a priori per l'analisi di raggruppamento basate sulla conoscenza di settore</i>	
<i>Sally Paganin</i>	
Clustering of Behavioral Spatial Trajectories in Neuropsychological Assessment	463
<i>Analisi dei gruppi di traiettorie spaziali nella valutazione neuropsicologica</i>	
<i>Francesco Palumbo, Antonio Cerrato, Michela Ponticorvo, Onofrio Gigliotta, Paolo Bartolomeo, Orazio Miglino</i>	
What is wrong in the debate about smart contracts.....	471
<i>Smart contract e diritto: riflessioni critiche su un dualismo fuorviante</i>	
<i>Roberto Pardolesi and Antonio Davola</i>	
Financial Transaction Data for the Nowcasting in Official Statistics	485
<i>Transazioni elettroniche di pagamento per le previsioni a breve nella Statistica ufficiale</i>	
<i>Righi A., Ardizzi G., Gambini A., Iannaccone R., Moauro F., Renzi N. and Zurlo D.</i>	
On the examination of a criticality measure for a complex system in a forecasting perspective	493
<i>Esame di una misura di criticità per un sistema complesso in una prospettiva previsionale</i>	
<i>Renata Rotondi and Elisa Varini</i>	
Knowledge discovery for dynamic textual data: temporal patterns of topics and word clusters in corpora of scientific literature	501
<i>Estrazione della conoscenza da dati testuali dinamici: evoluzione temporale di argomenti e gruppi di parole in corpora di letteratura scientifica</i>	
<i>Stefano Sbalchiero, Matilde Trevisani and Arjuna Tuzzi</i>	

Classifying the Willingness to Act in Social Media Data: Supervised Machine Learning for U.N. 2030 Agenda	509
Classificare la volontà di agire nei dati dei Social Media: Supervised Machine Learning per l'Agenda 2030 delle Nazioni Unite	
<i>Andrea Sciandra, Alessio Surian and Livio Finos</i>	
Classification of spatio-temporal point pattern in the presence of clutter using K-th nearest neighbour distances.....	517
Classificazione dei processi puntuali spazio-temporali basata sulla distanza dal K-mo vicino più vicino	
<i>Siino Marianna, Francisco J. Rodríguez-Cortés, Jorge Mateu, Giada Adelfio</i>	
Modelling properties of high-dimensional molecular systems	525
La modellazione di sistemi molecolari ad alta dimensionalità	
<i>Debora Slanzi, Valentina Mameli and Irene Poli</i>	
Non-crossing parametric quantile functions: an application to extreme temperatures	533
Il problema del crossing con funzioni quantiliche parametriche: un'applicazione alle temperature estreme	
<i>Gianluca Sottile and Paolo Frumento</i>	
A new tuning parameter selector in lasso regression.....	541
Un nuovo criterio di selezione per il parametro di penalizzazione nella regressione lasso	
<i>Gianluca Sottile and Vito MR Muggeo</i>	
Similarity patterns, topological information and credit scoring models	549
Strutture di similarità, informazioni topologiche e modelli di credit scoring	
<i>Alessandro Spelta, Branka Hadji-Misheva and Paolo Giudici</i>	
Between hawks and doves: measuring central bank communication	557
Fra falchi e colombe: valutazione delle comunicazioni di Banca Centrale	
<i>Ellen Tobback, Stefano Nardelli, David Martens</i>	
New methods and data sources for the population census	561
Nuovi metodi e fonti per il censimento della popolazione	
<i>Paolo Valente</i>	
FinTech and the Search for "Smart" Regulation	569
Fintech e la ricerca di una regolamentazione "smart"	
<i>Silvia Vanon</i>	
An anisotropic model for global climate data	577
Un modello anisotropico per i dati climatici globali	
<i>Nil Venet and Alessandro Fassò</i>	
Analysis of the financial performance in Italian football championship clubs via GEE and diagnostic measures.....	585
Analisi delle performance finanziaria delle squadre di calcio di serie A via GEE e misure di diagnostica	
<i>Maria Kelly Venezuela, Anna Crisci, Luigi D'Ambr, D'Ambr Antonello</i>	
A statistical space-time functional model for air quality analysis and mapping.....	593
Un modello statistico spazio-tempo funzionale per l'analisi e la mappatura della qualità dell'aria	
<i>Yaqiong Wang, Alessandro Fassò and Francesco Finazzi</i>	
Tempering and computational efficiency of Bayesian variable selection.....	599
Tempering e l'efficienza computazionale della selezione bayesiana delle variabili	
<i>Giacomo Zanella and Gareth O. Roberts</i>	
Dimensions and links for Hate Speech in the social media	607
Dimensioni e legami per i discorsi di odio nei social media	
<i>Emma Zavarrone, Guido Ferilli</i>	

Section 3. Contributed Papers

Density-based Algorithm and Network Analysis for GPS Data.....	617
Algoritmi di Cluster e Reti per lo studio di dati GPS	
<i>Antonino Abbruzzo, Mauro Ferrante, Stefano De Cantis</i>	
Local inference on functional data based on the control of the family-wise error rate	623
Inferenza locale per dati funzionali basata sul controllo del family-wise error rate	
<i>Konrad Abramowicz, Alessia Pini, Lina Schelin, Sara Sjöstedt de Luna, Aymeric Stamm, and Simone Vantini</i>	

Application and validation of dynamic Poisson models to measure credit contagion	629
<i>Applicazione e validazione di modelli di Poisson dinamici per misurare il contagio nel credito</i>	
<i>Arianna Agosto and Emanuela Raffinetti</i>	
Monitoring SDGs at territorial level: the case of Lombardy.....	637
<i>Il monitoraggio degli SDGs a livello territoriale: il caso della Lombardia</i>	
<i>Leonardo Alaimo, Livia Celardo, Filomena Maggino, Adolfo Morrone, Federico Olivieri</i>	
The Experts Method for the prediction of periodic multivariate time series of high dimension.....	643
<i>Il Metodo degli Esperti per la previsione di serie temporali multivariate e periodiche, di dimensione elevata</i>	
<i>Giacomo Aletti, Marco Bellan and Alessandra Micheletti</i>	
Regression with time-dependent PDE regularization for the analysis of spatio-temporal data	649
<i>Regressione con regolarizzazione di PDE tempo dipendenti per modellizzare dati spazio-temporali</i>	
<i>Eleonora Arnone, Laura Azzimonti, Fabio Nobile, Laura M. Sangalli</i>	
A network analysis of museum preferences: the Firenzecard experience.....	653
<i>Un'analisi di rete delle preferenze museali: l'esperienza della Firenzecard</i>	
<i>Silvia Bacci, Bruno Bertaccini, Roberto Dinelli, Antonio Giusti, and Alessandra Petrucci</i>	
A statistical learning approach to group response categories in questionnaires.....	659
<i>Un approccio basato sull'apprendimento statistico per raggruppare le categorie di risposta nei questionari</i>	
<i>Michela Battauz</i>	
Tree-based Functional Data Analysis for Classification and Regression.....	665
<i>Alberi di Classificazione e Regressione per dati Funzionali</i>	
<i>Edoardo Belli, Enrico Ragaini, Simone Vantini</i>	
PDE-regularized regression for anisotropic	669
<i>spatial fields Regressione con regolarizzazione differenziale per campi spaziali anisotropi</i>	
<i>Mara S. Bernardi, Michelle Carey, James O. Ramsay and Laura M. Sangalli</i>	
A Bayesian model for network flow data: an application to BikeMi trips	673
<i>Giulia Bissoli, Celeste Principi, Gian Matteo Rinaldi, Mario Beraha and Alessandra Guglielmi</i>	
Statistical classics in the big data era. When (astro-physical) models are nonregular.....	679
<i>Statistica classica nell'era dei big data. Verosimiglianza e modelli non regolari</i>	
<i>Alessandra R. Brazzale and Valentina Mameli</i>	
Bayesian Variable Selection for High Dimensional Logistic Regression	685
<i>Selezione bayesiana delle variabili nel modello di regressione logistica ad alta dimensionalita</i>	
<i>Claudio Busatto, Andrea Sottosanti and Mauro Bernardi</i>	
Bayesian modeling for large spatio-temporal data: an application to mobile networks	691
<i>Modelli bayesiani per grandi dataset spazio-temporali: un'applicazione a dati di telefonia mobile</i>	
<i>Annalisa Cadonna, Andrea Cremaschi, Alessandra Guglielmi</i>	
A Mathematical Framework for Population of Networks: Comparing Public Transport of Different Cities.	697
<i>Un approccio matematico all'analisi di una popolazione di networks: come confrontare il sistema di trasporto pubblico di diverse città.</i>	
<i>Anna Calissano, Aasa Feragen, Simone Vantini</i>	
How Important Discrimination is for the Job Satisfaction of Immigrants in Italy: A Counterfactual Approach	703
<i>Quanto influisce la discriminazione sulla soddisfazione lavorativa degli immigrati in Italia: un approccio controfattuale</i>	
<i>Maria Gabriella Campolo, Antonino Di Pino and Michele Limosani</i>	
Unfolding the SEcrets of LongEvity: Current Trends and future prospects (SELECT)	709
<i>A path through morbidity, disability and mortality in Italy and Europe</i>	
<i>Stefano Campostrini, Daniele Durante, Fabrizio Faggiano and Stefano Mazzucco</i>	
Galaxy color distribution estimation via dependent nonparametric mixtures	713
<i>Stima della distribuzione del colore delle galassie via misture nonparametriche dipendenti</i>	
<i>Antonio Canale, Riccardo Corradin and Bernardo Nipoti</i>	
A case for order optimal matching: a salary gap study.....	719
<i>Un algoritmo di matching ottimale ordinato per un studio sulle differenze salariali</i>	
<i>Massimo Cannas</i>	

A Prediction Method for Ordinal Consistent Partial Least Squares	725
Un Metodo di Previsione per l'Algoritmo Ordinal Consistent Partial Least Squares	
<i>Gabriele Cantaluppi and Florian Schuberth</i>	
Functional control charts for monitoring ship operating conditions and CO2 emissions based on scalar-on-function linear model	731
Carte di controllo funzionali per il monitoraggio delle condizioni operative e delle emissioni di CO2 di navi da carico e passeggeri mediante modello di regressione funzionale con risposta scalare	
<i>Christian Capezza, Antonio Lepore, Alessandra Menafoglio, Biagio Palumbo, and Simone Vantini</i>	
Predicting and improving smart mobility: a robust model-based approach to the BikeMi BSS	737
Prevedere e migliorare la mobilità smart: un approccio robusto di classificazione applicato a BikeMi	
<i>Andrea Cappozzo, Francesca Greselin and Giancarlo Manzi</i>	
Public support for an EU-wide social benefit scheme: evidence from Round 8 of the European Social Survey (ESS)	743
Sostegno pubblico a un sistema di prestazioni sociali a livello dell'Unione Europea: i risultati del Round 8 della European Social Survey (ESS)	
<i>Paolo Emilio Cardone</i>	
Revenue management strategies and Booking.com ghost rates: a statistical analysis	751
Strategie di revenue management e Booking.com ghost rates: un'analisi statistica	
<i>Cinzia Carota, Consuelo R. Nava, Marco Alderighi</i>	
Analysing international migration flows: a Bayesian network approach	757
Analisi dei flussi migratori internazionali attraverso l'impiego di modelli grafici	
<i>Federico Castelletti and Emanuela Furfaro</i>	
A sparse estimator for the function-on-function linear regression model	763
Uno stimatore sparso per il modello di regressione lineare con regressore e risposta funzionali	
<i>Fabio Centofanti, Matteo Fontana, Antonio Lepore, and Simone Vantini</i>	
Robustness and fuzzy multidimensional poverty indicators: a simulation study.....	769
Robustezza ed indicatori fuzzy multidimensionali della povertà: uno studio di simulazione	
<i>Michele Costa</i>	
Text Based Pricing Modelling: an Application to the Fashion Industry	775
Modellazione dei prezzi basata su dati testuali: un'applicazione all'industria fashion	
<i>Federico Crescenzi, Marzia Freo and Alessandra Luati</i>	
Model based clustering in group life insurance via Bayesian nonparametric mixtures	781
Raggruppamento basato sul modello nel settore assicurativo: un approccio bayesiano nonparametrico	
<i>Laura D'Angelo</i>	
Smart Tools for Academic Submission Decisions: Waiting Times Modeling	787
Strumenti "Smart" per sottoporre i manoscritti accademici: modelli per i tempi di attesa	
<i>Francesca De Battisti - Giancarlo Manzi</i>	
On the Use of Control Variables in PLS-SEM	793
Sull'Uso delle Variabili di Controllo nei PLS-SEM	
<i>Francesca De Battisti and Elena Siletti</i>	
Partial dependence with copula and financial applications	799
Dipendenza parziale con funzioni copula e applicazioni finanziarie	
<i>Giovanni De Luca, Marta Nai Ruscone and Giorgia Riveccio</i>	
Exploring the relationship between fertility and well-being: What is smart?.....	805
Esplorando la relazione tra fecondità e benessere: cosa c'è di smart?	
<i>Alessandra De Rose, Filomena Racioppi, Maria Rita Sebastiani</i>	
Web-Based Data Collection and Quality Issues in Co-Authorship Network Analysis	811
Qualità dei dati bibliografici raccolti via web per l'analisi di reti di collaborazione scientifica	
<i>Domenico De Stefano, Vittorio Fuccella, Susanna Zaccarin</i>	
A new regression model for bounded multivariate responses.....	817
Un nuovo modello di regressione per risposte multivariate limitate	
<i>Agnese Maria Di Brisco, Roberto Ascarì, Sonia Migliorati and Andrea Ongaro</i>	
Turning big data into smart data: two examples based on the analysis of the Mappa dei Rischi dei Comuni Italiani.....	823
Trasformare i big data in smart data: due esempi di analisi della Mappa dei Rischi dei Comuni Italiani	
<i>Oleksandr Didkovskiy, Alessandra Menafoglio, Piercesare Secchi, Giovanni Azzone</i>	

Hidden Markov Model estimation via Particle Gibbs	829
Stima di Hidden Markov Model tramite Particle Gibbs	
<i>Pierfrancesco Alaimo Di Loro, Enrico Ciminello and Luca Tardella</i>	
A note on marginal effects in logistic regression with independent covariates	837
Una nota sugli effetti marginali nella regressione logistica con covariate indipendenti	
<i>Marco Doretti</i>	
DNA mixtures: a case study involving a Romani reference population	843
Misure di DNA: un caso di studio riguardante una popolazione di riferimento dei Rom	
<i>Francesco Dotto, Julia Mortera and Vincenzo Pascali</i>	
Pivotal seeding for K-means based on clustering ensembles	849
Inizializzazione pivotale dell'algoritmo delle K-medie tramite raggruppamento con metodi di insieme	
<i>Leonardo Egidi, Roberta Pappadà, Francesco Pauli, Nicola Torelli</i>	
Optimal scoring of partially ordered data, with an application to the ranking of smart cities	855
Scoring ottimale di dati parzialmente ordinati, con un'applicazione al ranking delle smart city	
<i>Marco Fattore, Alberto Arcagni, Filomena Maggino</i>	
Bounded Domain Density Estimation	861
Stima della densità non-parametrica su domini bidimensionali limitati	
<i>Federico Ferraccioli, Laura M. Sangalli and Livio Finos</i>	
Polarization and long-run mobility: yearly wages comparison in three southern European countries	867
Polarizzazione e mobilità sul lungo periodo: un confronto fra salari annuali in tre Paesi sud-Europei	
<i>Ferretti C., Crosato L., Cipollini F., Ganugi P.</i>	
Design of Experiments, aberration and Market Basket Analysis	873
Pianificazione degli esperimenti, aberrazione e Market Basket Analysis	
<i>Roberto Fontana and Fabio Rapall</i>	
Generalized Procrustes Analysis for Multilingual Studies	879
Analisi Procrustiana Generalizzata per studi Multilingue	
<i>Alessia Forciniti, Michelangelo Misuraca, Germana Scepti, Maria Spano</i>	
Prior specification in flexible models	885
Specificazione delle prior in modelli flessibili	
<i>Maria Franco-Villoria, Massimo Ventrucci and Haavard Rue</i>	
Modeling Cyclists' Itinerary Choices: Evidence from a Docking Station-Based Bike-Sharing System	889
Un modello per gli itinerari dei ciclisti: risultati da un bike-sharing a stazioni fisse	
<i>S. T. Gaito - G. Manzi - G. Saibene - S. Salini - M. Zignani</i>	
A PARAFAC-ALS variant for fitting large data sets	895
Una variante del PARAFAC-ALS per approssimare data set di grandi dimensioni	
<i>Michele Gallo, Violetta Simonacci and Massimo Guarino</i>	
A Convex Mixture Model for Binomial Regression	901
Un modello mistura convessa per la Regressione Binomiale	
<i>Luisa Galtarossa and Antonio Canale</i>	
Blockchain as a universal tool for business improvement	907
Blockchain come strumento universale per il miglioramento aziendale	
<i>Massimiliano Giacalone, Diego Carmine Sinitò, Emilio Massa, Federica Oddo, Enrico Medda, Vito Santarcangelo</i>	
Seasonality in tourist flows: a decomposition of the change in seasonal concentration	913
La stagionalità nei flussi turistici: una scomposizione della variazione nella concentrazione stagionale	
<i>Luigi Grossi and Mauro Mussini</i>	
Are Real World Data the smart way of doing Health Analytics?	919
Real World Data: la base di una nuova ricerca clinica?	
<i>Francesca Ieva</i>	
Internet use and leisure activities: are all young people equal?	925
Internet e tempo libero: i giovani sono uguali tra loro?	
<i>Giuseppe Lamberti, Jordi Lopez Sintas and Pilar Lopez Belbeze</i>	
On a Family of Transformed Stochastic Orders	931
Su una famiglia di ordinamenti stocastici trasformati	
<i>Tommaso Lando and Lucio Bertoli-Barsotti</i>	

Bayesian stochastic search for Ising chain graph models	935
Ricerca stocastica Bayesiana per modelli grafici a catena Ising	
<i>Andrea Lazerini · Monia Lupporelli · Francesco C. Stingo</i>	
On the statistical design of parameters for variables sampling plans based on process capability index Cpk	941
Progettazione statistica dei parametri per il piano di campionamento per variabili basate sull'indice di capacità di processo Cpk	
<i>Antonio Lepore, Biagio Palumbo and Philippe Castagliola</i>	
Nowcasting foreign tourist arrivals using Google Trends: an application to the city of Florence, Italy	947
Nowcasting degli arrivi turistici stranieri usando Google Trends: un'applicazione nella città di Firenze, Italia	
<i>Alessandro Magrini</i>	
Inclusive growth in European countries: a cointegration analysis	953
La crescita inclusiva nei paesi europei: un'analisi di cointegrazione	
<i>Paolo Mariani, Andrea Marletta, Alessandra Michelangeli</i>	
ESCO- the European Labour Language: a conceptual and operational asset in support of labour governance in complex environments	959
ESCO il linguaggio europeo del lavoro: uno strumento concettuale ed operativo per le politiche del lavoro in contesti complessi	
<i>Cristilla Martelli, Laura Grassini, Adham Kahlawi, Maria Flora Salvatori, Lucia Buzzigoli</i>	
Hidden Markov Models for High Dimensional Data	965
Hidden Markov Models per dati ad alta dimensionalità	
<i>Martino, A., Guatteri, G., Paganoni, A.M.</i>	
Classification of Italian classes via bivariate semi parametric multilevel models	971
Classificazione delle classi italiane per mezzo di modelli bivariati a effetti misti semi parametrici	
<i>Chiara Masci, Francesca Ieva, Tommaso Agasisti and Anna Maria Paganoni</i>	
Data Mining Application to Healthcare Fraud Detection: Two-Step Unsupervised Clustering Method for Outlier Detection with Administrative Databases	977
Data Mining Applicato al Riconoscimento Frodi in Sanità: Algoritmo a Due Step per l'Identificazione di Outliers con Database Amministrativi	
<i>Massi Michela C., Ieva Francesca, Lettieri Emanuele</i>	
Multivariate analysis and biodiversity partitioning of a demersal fish community: an application to Lazio coast	985
Analisi multivariata e partizione della biodiversità di una comunità di specie demersali: un'applicazione alla costa laziale	
<i>M. Mingione, G. Jona Lasinio, S. Martino, F. Colloca</i>	
Latent Markov models with discrete separate cluster random effects on initial and transition probabilities	991
Modelli Latent Markov ad effetti casuali discreti e separati per le probabilità iniziali e di transizione	
<i>Giorgio E. Montanari and Marco Doretti</i>	
Unsuitability of likelihood-based asymptotic confidence intervals for Response-Adaptive designs in normal homoscedastic trials	997
Inadeguatezza degli intervalli di confidenza asintotici basati sulla verosimiglianza per disegni Response-Adaptive in caso di risposte normali omoschedastiche	
<i>Marco Novelli and Maroussa Zagoraïou</i>	
Local Hypothesis Testing for Functional Data: Extending False Discovery Rate to the Functional Framework	1003
Verifica locale delle ipotesi nell'ambito dei dati funzionali: estensione della nozione di False Discovery Rate al contesto funzionale	
<i>Niels Asken Lundtorp Olsen, Alessia Pini, and Simone Vantini</i>	
Educational mismatch and attitudes towards migration in Europe	1009
Disallineamento fra formazione e lavoro e atteggiamenti verso le migrazioni in Europa	
<i>Marco Guido Palladino and Emiliano Sironi</i>	
Soft thresholding Bayesian variable selection for compositional data analysis	1015
Selezione di Variabili Bayesiana con funzioni di soglia per l'analisi di dati di composizione	
<i>Matteo Pedone, Francesco C. Stingo</i>	
Sentiment-driven investment strategies: a practical example of AI-powered engines in a corporate setting	1021
Strategie d'investimento guidate dal sentiment: un esempio pratico di Intelligenza Artificiale in contesto aziendale	
<i>Mattia Pedrini, Sebastian Donoso, Enrico Deusebio, Nicola Donelli, Gabriele Arici, Andrea Cosentini, Paola Mosconi, Diego Ostinelli and Claudio Cocchis</i>	

Betting on football: a model to predict match outcomes	1027
Scommettere sul calcio: un nuovo modello per prevedere l'esito delle partite	
<i>Marco Petretta, Lorenzo Schiavon and Jacopo Diquigiovanni</i>	
Estimation of dynamic quantile models via the MM algorithm	1033
Stima di modelli Quantilici Dinamici con algoritmo MM	
<i>Fabrizio Poggioni, Mauro Bernardi, Lea Petrella</i>	
The decomposition by subpopulations of the Pietra index: an application to the professional football teams in Italy	1039
La scomposizione per sottopopolazioni dell'indice di Pietra: un'applicazione alle squadre professionistiche di calcio in Italia	
<i>Francesco Porro and Mariangela Zenga</i>	
An Object Oriented Data Analysis of Tweets: the Case of Queen Elizabeth Olympic Park .	1045
Object Oriented Data Analysis di Tweet: il caso del Queen Elizabeth Olympic Park	
<i>Paola Riva, Paola Sturla, Anna Calissano and Simone Vantini</i>	
Bias reduced estimation of a fixed effects model for Expected Goals in association football	1051
Stima non distorta di un modello Expected Goal con effetti fissi nel calcio	
<i>Lorenzo Schiavon and Nicola Sartori</i>	
Looking for Efficient Methods to Collect and Geolocalise Tweets	1057
Alla ricerca di metodi efficienti per raccogliere e geolocalizzare tweet	
<i>Stephan Schlosser, Daniele Toninelli and Silvia Fabris</i>	
Principal ranking profiles	1063
Principal ranking profiles	
<i>Mariangela Sciandra, Antonella Plaia</i>	
A statistical model for voting probabilities	1069
Un modello statistico per le probabilità di voto	
<i>Rosaria Simone, Stefania Capecchi</i>	
How Citizen Science and smartphones can help to produce timely and reliable information? Evidence from the "Food Price Crowdsourcing in Africa" (FPCA) project in Nigeria	1075
Citizen Science e smartphone posso aiutare nella raccolta di dati tempestivi e affidabili? Testimonianze del progetto "Food Price Crowdsourcing in Africa" (FPCA) condotto in Nigeria	
<i>Gloria Solano-Hermosilla, Fabio Micale, Vincenzo Nardelli, Julius Adewopo, Celso Gorrín González</i>	
Dealing with uncertainty in automated test assembly problems	1083
La gestione dell'incertezza nei problemi di assemblaggio automatizzato dei test	
<i>Giada Spaccapanico Proietti, Mariagiulia Matteucci and Stefania Mignani</i>	
Joint Models: a smart way to include functional data in healthcare analytics	1089
Modelli congiunti: un metodo per includere i dati funzionali nelle analisi in ambito sanitario	
<i>Marta Spreafico, Francesca Ieva</i>	
Bayesian multiscale mixture of Gaussian kernels for density estimation	1095
Stima di densità tramite misture bayesiane multiscala di kernel gaussiani	
<i>Marco Stefanucci and Antonio Canale</i>	
Dynamic Bayesian clustering of running activities	1101
Clustering Bayesiano dinamico di attività di corsa	
<i>Mattia Stival and Mauro Bernardi</i>	
Employment and fertility in couples: whose employment uncertainty matter most?	1107
Lavoro e fecondità in coppia: il ruolo dell'incertezza lavorativa secondo una prospettiva di genere	
<i>Valentina Tocchioni, Daniele Vignoli, Alessandra Mattei, Bruno Arpino</i>	
A Functional Data Analysis Approach to Study a Bike Sharing Mobility Network in the City of Milan	1113
<i>Agostino Torti, Alessia Pini and Simone Vantini</i>	
Multiresolution Topological Data Analysis for Robust Activity Tracking	1119
<i>Giovanni Trappolini, Tullia Padellini, and Pierpaolo Brutti</i>	
Semilinear regression trees	1125
Alberi di regressione semilineari	
<i>Giulia Vannucci and Anna Gottard</i>	

A models selection criterion for evaluation of heat wave hazard: a case study of the city of Prato.....	1131
Un criterio di selezione dei modelli per la valutazione della pericolosità delle ondate di calore: un caso studio della città di Prato	
<i>Veronica Villani, Giuliana Barbato, Elvira Romano and Paola Mercogliano</i>	
Digital Inequalities and ICT Devices: The ambiguous Role of Smartphones.....	1139
<i>Laura Zannella, Marina Zannella</i>	

Section 4. Posters

Modelling Hedonic Price using semiparametric M-quantile regression	1147
Regressione m-quantilica semiparametrica per la modellizzazione dei prezzi edonici	
<i>Riccardo Borgoni, Antonella Carcagni, Alessandra Michelangeli, Nicola Salvati</i>	
Bayesian mixed latent factor model for multi-response marine litter data with multi-source auxiliary information	1153
Modello bayesiano misto a fattori latenti per l'abbondanza di rifiuti marini con informazioni ausiliarie di diversa provenienza	
<i>Crescenza Calculli, Alessio Pollice, Marco V. Guglielmi and Porzia Maiorano</i>	
Official statistics to support the projects of A Scuola di OpenCoesione	1159
L'esperienza di monitoraggio civico in Lombardia nell'anno scolastico 2018-19	
<i>del Vicario G. and Di Gennaro L. and Ferrazza D. and Spinella V. and Viviano L.</i>	
Spatial Logistic Regression for Events Lying on a Network: Car Crashes in Milan.....	1165
Regressione logistica per eventi su network: gli incidenti automobilistici nel comune di Milano	
<i>Andrea Gilardi, Riccardo Borgoni and Diego Zappa</i>	
Variable selection and classification by the GRID procedure	1171
Selezione e classificazione delle variabili attraverso il metodo GRID	
<i>Francesco Giordano, Soumendra Nath Lahiri and Maria Lucia Parrella</i>	
Joint VaR and ES forecasting in a multiple quantile regression framework.....	1177
Stima congiunta del VaR e dell'ES attraverso la regressione quantilica multipla	
<i>Merlo Luca, Petrella Lea and Raponi Valentina</i>	
Approximate Bayesian Computation methods to model Multistage Carcinogenesis	1183
Metodi di Approximate Bayesian Computation per modellare la Cancerogenesi Multistadiale	
<i>Consuelo R. Nava, Cinzia Carota, Jordy Bollon, Corrado Magnani, Francesco Barone-Adesi</i>	
Co-clustering TripAdvisor data for personalized recommendations	1189
Co-clustering di dati TripAdvisor per un sistema di raccomandazioni personalizzato	
<i>Giulia Pascali, Alessandro Casa and Giovanna Menardi</i>	
Latent class analysis of endoreduplicated nuclei in confocal microscopy.....	1195
Analisi di classi latenti per dati di nuclei endoreduplicati tramite microscopia confocale	
<i>Ivan Sciascia ivan.sciascia@unito.it, Gennaro Carotenuto gennaro.carotenuto@unito.it, Andrea Genre andrea.genre@unito.it, Università di Torino Dipartimento di Scienze della vita e biologia dei sistemi, viale Mattioli 25, 10125 Torino</i>	

Bayesian Model Comparison based on Wasserstein Distances

Confronto di Modelli Bayesiani tramite Distanze di Wasserstein

Marta Catalano, Antonio Lijoi and Igor Prünster

Abstract Exchangeable processes are extensively used in Bayesian nonparametrics to model exchangeable data. Most common approaches assign a law to the process through the specification of a random measure. When two processes only differ in the law of the random measure, a distance between random measures provides a natural way to compare them. In this work we propose one by relying on the Wasserstein distance. Moreover, we overcome the analytical difficulties of evaluating the distance by developing sharp upper and lower bounds. The specialization of these bounds to Gamma random measures provides the exact value of the Wasserstein distance in terms of the Kolmogorov distance between the base measures. The results are based on a forthcoming work in collaboration with A. Lijoi and I. Prünster.

Abstract *I processi scambiabili sono usati di frequente per modellare dati scambiabili. Nella maggior parte dei casi la legge del processo richiede la specificazione di una misura aleatoria. Quando due sequenze scambiabili differiscono solamente nella distribuzione delle misure, la valutazione di una distanza tra misure aleatorie fornisce un modo naturale di metterle a confronto. In questo lavoro ne proponiamo una basata sulla distanza di Wasserstein. Inoltre, superiamo le difficoltà analitiche tramite la derivazione di limiti superiori e inferiori. La specializzazione dei limiti alle misure aleatorie Gamma fornisce il valore esatto della distanza di Wasserstein in termini di distanza di Kolmogorov tra misure base. I contenuti si basano su un lavoro di prossima pubblicazione in collaborazione con A. Lijoi e I. Prünster.*

Key words: Bayesian nonparametrics, Completely random measures, Increasing additive processes, Wasserstein distance.

Marta Catalano
Bocconi University, Milano, Italy. e-mail: marta.catalano@unibocconi.it

Antonio Lijoi
Bocconi University and Bocconi Institute of Data Science and Analytics (BIDSA), Milano, Italy.
e-mail: antonio.lijoi@unibocconi.it

Igor Prünster
Bocconi University and BIDSA, Milano, Italy. e-mail: igor.pruenster@unibocconi.it

1 Introduction

Consider a generic parametric class of models $\mathcal{M} = \{M_\theta \mid \theta \in \Theta \subset \mathbb{R}^k\}$ assumed to describe or approximate the distribution of n observations (x_1, \dots, x_n) . Many Bayesian inferential procedures rely on a notion of *discrepancy* between models, which is often translated into a distance between random variables. For example, sensitivity to the prior is assessed through a comparison between the posterior distributions, which often amounts to the evaluation of a (pseudo-)distance; see [2] for a review. Moreover, these are also used in model selection [10], variable selection [7], and in general in Bayesian testing when the hypotheses are nested. In this context many authors think that Bayes factors, corresponding to 0–1 losses, may be too restrictive and prefer considering distance-based losses instead [3, 16, 17].

A consistent portion of the Bayesian literature now focuses on the specification and properties of the so-called nonparametric priors, whose large support guarantees reliable predictions and estimations. The analytical tractability of the Dirichlet process [9] opened the way to the study of many nonparametric structures relying on random measures. For example, random measures are often normalized so to provide de Finetti measures [14, 15] or to define priors for density functions [1], which are both used to specify the law of an exchangeable process. In survival analysis, moreover, they provide effective ways to specify the law of random hazard functions [8] or cumulative hazards [6, 11]. In all these cases, the specification of the law for a stochastic process of interest requires the distribution of a random measure. Typical inferential procedures analyse how this distribution is affected by the observed data. Nonparametric analogues of the previous procedures, such as sensitivity assessment and hypothesis testing, could then be based on distances between random measures. Interestingly, to the best of our knowledge there has not been any attempt to define such distances in the Bayesian nonparametric literature. We here propose a way to fill in this gap by exploiting the Wasserstein distance. While simulations of the Wasserstein distance are easily achieved [19], analytical evaluations are generally difficult. This raises the need for analytically tractable and sharp bounds. We achieve such bounds for a wide subclass of random measures, the so-called completely random measures.

The outline of the work is the following. After a brief recapitulation of basic notions about completely random measures and the Wasserstein distance, in Section 3 we provide general upper and lower bounds for the Wasserstein distance between completely random measures. These are expressed in terms of the underlying Lévy measures and are then specialized to Gamma completely random measures in Section 4.

2 Preliminaries

This section will be devoted to the definition of a distance between random measures. We first recall some useful properties of the Wasserstein distance and of completely random measures.

Let \mathbb{X} be a Polish space with respect to a metric d , endowed with the Borel σ -algebra $\mathcal{B}(\mathbb{X})$, and let X_1 and X_2 be \mathbb{X} -valued random elements. The Wasserstein distance of order $p \in [1, +\infty)$ between X_1 and X_2 is defined as

$$W_{p,d}(X_1, X_2) = \inf_{(Z_1, Z_2) \in C(X_1, X_2)} \left\{ \mathbb{E}(d(Z_1, Z_2)^p)^{\frac{1}{p}} \right\},$$

where $C(X_1, X_2)$ indicates the Fréchet class of X_1 and X_2 , i.e. the set of distributions on the product space \mathbb{X}^2 whose marginal distributions on \mathbb{X} coincide with the laws of X_1 and X_2 . In the rest of the paper we will focus on the case $p = 1$ and $(\mathbb{X}, d) = (\mathbb{R}, |\cdot|)$, i.e. the real line with Euclidean distance, and we will denote such distance W . It can be shown that

$$|\mathbb{E}(X) - \mathbb{E}(Y)| \leq W(X, Y) \leq \mathbb{E}(|X|) + \mathbb{E}(|Y|). \quad (1)$$

In particular, the Wasserstein distance is finite when the random variables have finite mean.

Consider the space $\mathbb{M}(\mathbb{R})$ of boundedly finite measures on \mathbb{R} endowed with the weak[#] topology [5], and denote by $\mathcal{M}(\mathbb{R})$ the corresponding Borel σ -algebra. A random measure is a random element on the Borel space $(\mathbb{M}(\mathbb{R}), \mathcal{M}(\mathbb{R}))$. We identify each random measure $\tilde{\mu}$ with its corresponding cumulative process $\{\tilde{\mu}((-\infty, x])\}_{x \in \mathbb{R}}$ and propose the following distance between random measures.

Definition 1. Given two random measures $\tilde{\mu}_1$ and $\tilde{\mu}_2$ on \mathbb{R} we define

$$d_W(\tilde{\mu}_1, \tilde{\mu}_2) = \sup_{x \in \mathbb{R}} W(\tilde{\mu}_1((-\infty, x]), \tilde{\mu}_2((-\infty, x])),$$

where W is the Wasserstein distance. It is easily shown that d_W is a distance on the laws of random measures and we refer to it as the Wasserstein distance between random measures. The distance d_W is finite whenever $\mathbb{E}(\tilde{\mu}_i(\mathbb{R})) < +\infty$, for $i = 1, 2$.

The rest of the work concerns the evaluation of this distance on the so-called completely random measures. A random element $\tilde{\mu}$ taking values in $(\mathbb{M}(\mathbb{R}), \mathcal{M}(\mathbb{R}))$ is a completely random measure (CRM) if, given a finite collection of pairwise disjoint bounded sets $\{A_1, \dots, A_n\}$ in $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, the random variables $\{\tilde{\mu}(A_1), \dots, \tilde{\mu}(A_n)\}$ are mutually independent [12]. Every CRM $\tilde{\mu}$ can be decomposed as the sum of three independent components, $\tilde{\mu} \stackrel{d}{=} \mu + \tilde{\mu}_f + \tilde{\mu}_c$, where μ is a deterministic measure, $\tilde{\mu}_f$ is a random measure with fixed atoms and $\tilde{\mu}_c$ is a random measure without fixed atoms. Let $\mathbb{R}^+ = (0, +\infty)$. In particular, for every CRM without fixed atoms there exists a diffuse boundedly finite measure ν on $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$ such that

$$\tilde{\mu}_c(dy) \stackrel{d}{=} \int_0^{+\infty} s \mathcal{N}(ds, dy),$$

where \mathcal{N} is a Poisson random measure with intensity ν . This means that \mathcal{N} is a CRM on $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$ and, for any $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^+) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R})$ such that $\nu(B) < \infty$, $\mathcal{N}(B)$ is a Poisson random variable with mean $\nu(B)$. The corresponding cumulative process $\{\tilde{\mu}_c((-\infty, x])\}_{x \in \mathbb{R}}$ is an increasing additive process on \mathbb{R} with Lévy measures $\nu_x(ds) = \int_{(-\infty, x]} \nu(ds, dy)$ satisfying

$$\int_0^1 s \wedge 1 \nu_x(ds) < +\infty \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

In applications to Bayesian frameworks one is usually interested in CRMs that are infinitely active, i.e. such that $\nu_x((0, 1]) = +\infty \forall x \in \mathbb{R}$. Moreover, we point out that $\tilde{\mu}_c$ has finite mean if and only if $\sup_x \int_0^{+\infty} s \nu_x(ds) < +\infty$.

3 Wasserstein Bounds for Completely Random Measures

The Wasserstein distance can be easily simulated [19] but it is generally difficult to evaluate analytically. Nonetheless this is an important task since it can be used to quantify, for example, the sensitivity of the model to the prior specification of CRM. Our purpose for this section is to provide a general framework to derive upper and lower bounds for the Wasserstein distance between completely random measures in terms of their corresponding Lévy measure.

We focus on CRMs without fixed atoms, though our results can be extended in a natural way to CRMs with atoms. If $\tilde{\mu}$ is infinitely active, its Lévy measure ν is diffuse and not finite. Thus, for $i = 1, 2$ and $r > 0$ there exists $\varepsilon_{i,r} > 0$ such that

$$\nu_{i,x}([\varepsilon_{i,r}, +\infty)) = r.$$

We further define the probability measure $\rho_{i,r,x}$ to be proportional to the restriction of $\nu_{i,x}$ on the interval $[\varepsilon_{i,r}, +\infty)$, i.e.

$$\rho_{i,r,x}(ds) = \frac{\nu_{i,x}(ds)}{r} \mathbb{1}_{[\varepsilon_{i,r}, +\infty)}(s),$$

which can be shown to be the distribution of the jumps of the compound poisson approximation of $\mu_i((-\infty, x])$; see [18].

Theorem 1. *Let $\tilde{\mu}_1$ and $\tilde{\mu}_2$ be infinitely active CRMs with finite mean. Then for every $x \in \mathbb{R}$*

$$\left| \int_0^{+\infty} s (\nu_{1,x} - \nu_{2,x})(ds) \right| \leq W(\tilde{\mu}_1((-\infty, x]), \tilde{\mu}_2((-\infty, x])) \leq \lim_{r \rightarrow +\infty} r W(\rho_{1,r,x}, \rho_{2,r,x}).$$

Moreover, the limit on the right hand side is finite.

The lower bound is an immediate consequence of (1). As for the right hand side, it can be seen as a generalization of [13], where the authors provide upper bounds on the Wasserstein distance between Lévy processes; see [4] for a proof.

4 Gamma Completely Random Measures

In this section we apply Theorem 1 to evaluate the exact expression of the Wasserstein distance between Gamma completely random measures. We recall that a Gamma CRM $\tilde{\mu}$ of parameter $b > 0$ and base measure α has Lévy intensity

$$\nu(ds, dy) = \frac{e^{-sb}}{s} \mathbb{1}_{(0, +\infty)}(s) ds \alpha(dy).$$

We use the notation $\tilde{\mu} \sim \text{Ga}(b, \alpha)$. The random measure $\tilde{\mu}$ is easily shown to be infinitely active and, if α is a finite measure on \mathbb{R} , it has a finite mean. Moreover, we set $x \mapsto A(x) = \alpha((-\infty, x])$.

Theorem 2. *Let $\tilde{\mu}_i \sim \text{Ga}(b_i, \alpha_i)$, where $0 < b_1 < b_2$ and α_i is a finite measure on \mathbb{R} for $i = 1, 2$. Then,*

1. *If $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$,*

$$W(\tilde{\mu}_1((-\infty, x]), \tilde{\mu}_2((-\infty, x])) = A(x) \left| \frac{1}{b_1} - \frac{1}{b_2} \right|;$$

2. *If $b_1 = b_2 = b$,*

$$W(\tilde{\mu}_1((-\infty, x]), \tilde{\mu}_2((-\infty, x])) = \frac{1}{b} |A_1(x) - A_2(x)|.$$

Remark 1. Theorem 2 clarifies the sharpness of the bounds derived in Theorem 1. Indeed, in this case the upper and lower bound coincide and can thus be used to derive the exact value of the Wasserstein distance.

Remark 2. Theorem 2 provides an immediate evaluation of the distance between completely random measures defined in Definition 1. By taking the supremum over $x \in \mathbb{R}$, one derives

1. *If $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$,*

$$d_W(\tilde{\mu}_1, \tilde{\mu}_2) = \alpha(\mathbb{R}) \left| \frac{1}{b_1} - \frac{1}{b_2} \right|;$$

2. *If $b_1 = b_2 = b$,*

$$d_W(\tilde{\mu}_1, \tilde{\mu}_2) = \frac{1}{b} K(\alpha_1, \alpha_2),$$

where $K(\alpha_1, \alpha_2)$ indicates the Kolmogorov distance between two finite measures, namely

$$K(\alpha_1, \alpha_2) = \sup_x |A_1(x) - A_2(x)|.$$

Intuitively, one expects that CRMs with similar parameters are close to each other. Our results confirm the intuition and allow for a precise quantification of the *closeness* in terms of Wasserstein distance.

References

1. Barrios, E. and Lijoi, A., Nieto-Barajas, L. E. and Prünster, I.: Modeling with normalized random measure mixture models. *Stat. Sci.* **28**, 313–334 (2013)
2. Berger, J.O.: An overview of robust Bayesian analysis (with discussion). *Test.* **3**, 5–124. Springer (1994)
3. Bernardo, J. M., Rueda, R.: Bayesian hypothesis testing: A reference approach. *Int. Stat. Rev.* **70**, 351–372 (2002)
4. Catalano, M., Lijoi, A., Prünster, I.: Wasserstein convergence rates of an approximate sampler for time-to-event data. In preparation.
5. Daley, D.J. and Vere-Jones, D.: An Introduction to the Theory of Point Processes: Volume I: Elementary Theory and Methods. Probability and Its Applications. Springer (2002)
6. Doksum, K.: Tailfree and Neutral Random Probabilities and Their Posterior Distributions. *Ann. Probab.* **2**, 183–201 (1974)
7. Dupuis, J. A., Robert, C. P.: Variable selection in qualitative models via an entropic explanatory power. *J. Stat. Plan. Inference.* **111**, 77–94 (2003)
8. Dykstra, R. L., Laud, P.: A Bayesian Nonparametric Approach to Reliability. *Ann. Statist.* **9**, 356–367 (1981)
9. Ferguson, T. S.: A Bayesian analysis of some nonparametric problems. *Ann. Statist.* **1**, 209–230 (1973)
10. Goutis, C., Robert, C.: Model choice in generalised linear models: A Bayesian approach via Kullback-Leibler projections. *Biometrika.* **85**, 29–37 (1998)
11. Hjort, N. L.: Nonparametric Bayes estimators based on beta processes in models for life history data. *Ann. Statist.* **18**, 1259–1294 (1990)
12. Kingman, J. F. C.: Completely random measures. *Pacific J. Math.* **21**, 59–78 (1967)
13. Mariucci, E. and Reiß, M.: Wasserstein and total variation distance between marginals of Lévy processes. *Electron. J. Statist.* **12**, 2482–2514 (2018)
14. Pitman, J. and Yor, M.: The two-parameter Poisson-Dirichlet distribution derived from a stable subordinator. *Ann. Probab.* **25**, 855–900 (1997)
15. Regazzini, E. and Lijoi, A. and Prünster, I.: Distributional results for means of normalized random measures with independent increments. *Ann. Statist.* **31**, 560–585 (2003)
16. Rousseau, J.: Approximating interval hypothesis: p-values and Bayes factors. *Bayesian Statistics 8, Oxford Sci. Publ.* **8**, 417–452 (2007)
17. Salomond, J.-B.: Testing Un-Separated Hypotheses by Estimating a Distance. *Bayesian Anal.* **13**, 461–484 (2018)
18. Sato, K.: Lévy Processes and Infinitely Divisible Distributions. Cambridge University Press (1999)
19. Sriperumbudur, B. K., Fukumizu, K., Gretton, A., Schölkopf, B., Lanckriet, G. R. G.: On the empirical estimation of integral probability metrics. *Electron. J. Statist.* **6**, 1550–1599 (2012)